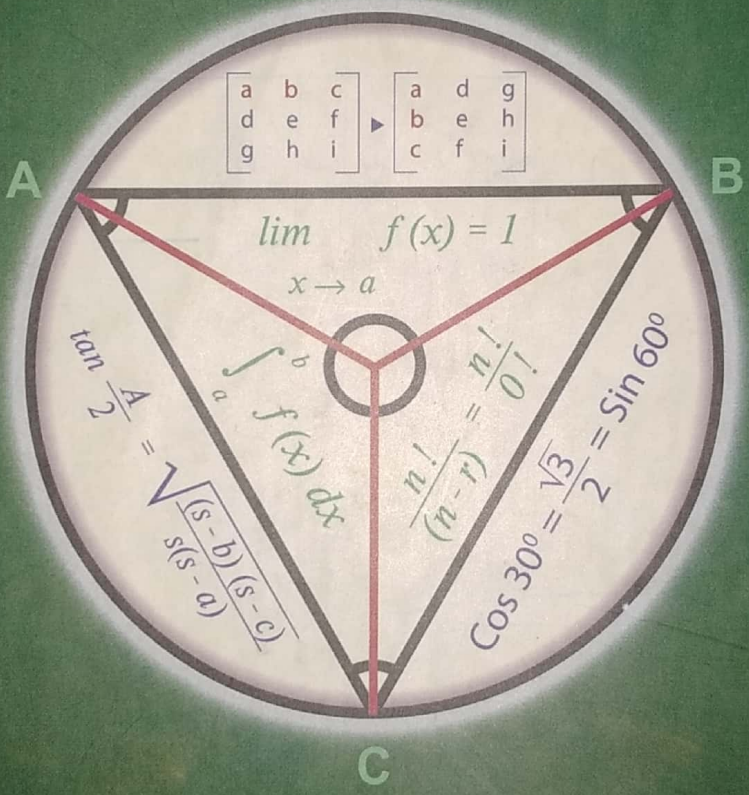
ইঞ্জিনিয়ারিং
কনসেপ্ট বুক

উচ্চতর গণিত
১ম পত্র



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Scanned with CamScanner

সূচিপত্র

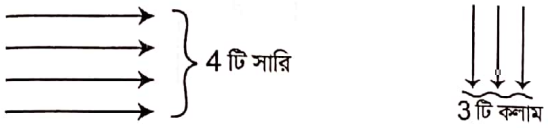
অধ্যায়	অধ্যায়ের নাম	পৃষ্ঠা
প্রথম অধ্যায়	ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক	০১-১৬
দ্বিতীয় অধ্যায়	ভেক্টর	১৭-৩৪
তৃতীয় অধ্যায়	সরলরেখা	৩৫-৬৪
চতুর্থ অধ্যায়	বৃত্ত	৬৫-৯৬
পঞ্চম অধ্যায়	বিন্যাস ও সমাবেশ	৯৭-১৩৪
ষষ্ঠ অধ্যায়	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৩৫-১৪৬
সপ্তম অধ্যায়	সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৪৭-১৭৩
অষ্টম অধ্যায়	ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র	১৭৪-১৯৩
নবম অধ্যায়	অন্তরীকরণ	১৯৪-২৩৮
দশম অধ্যায়	যোগজীকরণ	২৩৯-২৮৮

Scanned with CamScanner

অধ্যায়-০১: ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম:



- **ম্যাট্রিক্স:** কোনো রাশিকে যদি সারি ও কলামে সুবিন্যস্ত করা হয় তখন ঐ সুষম রাশিকে ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ একটি (3×4) ম্যাট্রিক্স কেননা এতে 3 টি সারি ও 4 টি কলাম আছে।

অনেকক্ষেত্রে $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়। সংক্ষেপে $A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n \\ i,j,m,n\in N}}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়; যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সটির উপাদান প্রকাশ করে এবং m ম্যাট্রিক্সটির সারি সংখ্যা ও n কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে।

- দু'টি ম্যাট্রিক্স সমান হতে গেলে তাদের অবস্থানের স্ব-স্ব মান সমান হতে হবে। যেমন, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 4 \\ y & 5 \end{bmatrix}$ হলে অবশ্যই $x = 2, y = 3$ হবে।

- **শূন্য (Zero) ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের সবগুলো উপাদান শূন্য তাকে নাল (Null) বা বিদেহী বা শূন্য (Zero) ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- **বর্গ ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও কলাম সংখ্যা সমান, তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

- ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই।

- বর্গ ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক (Determinant) আকারে প্রকাশ করে সেই নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা যায়। যেকোন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক-কে লেখা হয় $|A|$ বা, $\det(A)$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- একটি নির্ণায়কে কোন উপাদান যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ উপাদানের অনুরাশি (Minor) বলে। যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে 8 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; 7 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

- অনুরাশির আগে 'অবস্থান-সূচক চিহ্ন' বসালে যা পাওয়া যায়, তাই উক্ত উপাদানের সহগুণক (Co-factor)। চিহ্ন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত উপায় অবলম্বন করা যেতে পারে।

$(-1)^{r+c}$ যেখানে, **r** = উপাদানের সারি নম্বর; **c** = উপাদানের কলাম নম্বর; $(r + c)$ জোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন ধনাত্মক (+) আর $(r + c)$ বিজোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন ঋণাত্মক (−).

অর্থাৎ, a_{rc}- এর সহগুণক = $(-1)^{r+c} \times a_{rc}$-এর অনুরাশি।

যেমন- উপরিউক্ত নির্ণায়কে 8 এর সহগুণক হচ্ছে = $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; [∵ 8 এর জন্য $r = 2, c = 2$ ∴ $r + c = 4$ যা জোড় সংখ্যা]

$= \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

আবার, 2 এর সহগুণক হচ্ছে = $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; [∵ 2 -এর জন্য $r = 2, c = 1$ ∴ $r + c = 3$ যা বিজোড় সংখ্যা]

Scanned with CamScanner

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$ যেখানে A_i, B_i, C_i হচ্ছে a_i, b_i, c_i এর সহগুণক $[1 \le i \le 3$ এবং $i \in \mathbb{N}]$. একইভাবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 = a_1b_2 + b_1(-a_2) = a_1b_2 - a_2b_1$

- কোন ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও কলাম পরস্পর interchange করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে ট্রান্সপোজ (Transpose) ম্যাট্রিক্স বলে। একে A' বা A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর অপর নাম বিম্ব ম্যাট্রিক্স। $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

- $I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $(n \times n)$ আকারের একক অভেদক (Identity) ম্যাট্রিক্স যেন, $IA = AI = A$.

  $I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ এর মুখ্যকর্ণ বরাবর যোগফল$(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})$ হচ্ছে এর ট্রেস (Trace).

- কিছু বিশেষ ম্যাট্রিক্স:

  (i) লম্ব **(Orthogonal)** ম্যাট্রিক্সঃ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A \cdot A^T = A^T \cdot A = 1$ হয়। অর্থাৎ, যদি $A^T = A^{-1}$ হয়।

  (ii) একক্ষম **(Idempotent)** ম্যাট্রিক্সঃ কোন A ম্যাট্রিক্স একক্ষম হবে, যদি $A^2 = A$ হয়।

  (iii) অক্ষম বা বিনাশক **(Nilpotent)** ম্যাট্রিক্সঃ p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, যদি $A^p = 0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স) হয়, তবে A একটি বিনাশক ম্যাট্রিক্স। একে p ক্রমের শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্সও বলে।

  (iv) উদঘাতিক **(Involuntary)** ম্যাট্রিক্সঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

  (v) অনুবন্ধী **(Conjugate)** ম্যাট্রিক্সঃ কোন A ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (উপাদান) জটিল সংখ্যা হলে, প্রত্যেক জটিল সংখ্যার স্থানে তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বসিয়ে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সকে A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং $\bar{A}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়।

  $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i & 2-3i \\ 5 & -i & 4 \\ 3-5i & 7 & 5+2i \end{bmatrix}$ হলে, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i & 2+3i \\ 5 & i & 4 \\ 3+5i & 7 & 5-2i \end{bmatrix}$

  (vi) হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian Matrix): কোন বর্গ জটিল ম্যাট্রিক্স এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স এর ট্রান্সপোজ যদি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স এর সমান হয় তাবে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স।

  (vii) উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার Matrix (Upper triangle Matrix) মুখ্য কর্ণের নিচের সবগুলি ভুক্তি 0 হলে প্রদত্ত Matrix টি হবে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার Matrix যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

  (viii) নিম্ন ত্রিভুজাকার Matrix (Lower triangle Matrix) মুখ্য কর্ণের উপরের সবগুলি ভুক্তি 0 হলে প্রদত্ত Matrix হবে নিম্ন ত্রিভুজাকার Matrix যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Scanned with CamScanner

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ ও গুণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Concept:**(i) দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে যেই ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাই যোগফল বা বিয়োগফল।

(ii) একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

(iii) দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারিসংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

যেমন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে (AB) সম্ভব কিন্তু (BA) সম্ভব না।

Example-01. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5I = ?$ [এখানে, $I = I_3$] **[KUET'05-06]**

Sol^n:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2+2\times2 & 1\times2+2\times1+2\times2 & 1\times2+2\times2+2\times1 \\ 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times2+1\times2+2\times1 \\ 2\times1+2\times2+1\times2 & 2\times2+2\times1+1+2 & 2\times2+2\times2+1\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{(3,3)}$ (Ans.)

Example-02. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$ এবং $i = \sqrt{-1}$ হলে AB এর মান কত? **[DU'12-13]**

Sol^n: $AB = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-i & -1+1 \\ 1-1 & i-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Type-02: ম্যাট্রিক্স এর উপাদান নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Concept:** যদি মাত্রা দেয়া না থাকে তাহলে প্রথমে মাত্রা বের করে নিতে হবে। এরপর x, y, z ইত্যাদি বসিয়ে গুণ করে সমতা করে জোটের সমাধান করতে হবে।

Example-03. যদি $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, হয়, তাহলে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। **[BUET'17-18]**

Sol^n: ধরি, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ সুতরাং, $B \times A = C$

এখন B এর ক্রম $= 3 \times 1$; C এর ক্রম $= 3 \times 3$

সুতরাং A এর ক্রম $= 1 \times 3$ $[\because B_{(3\times1)} \times A_{(1\times3)} = C_{(3\times3)}]$

ধরি, $A = [x \quad y \quad z]$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ ..... (i)}$$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $4x = -4 \Rightarrow x = -1; 4y = 8 \Rightarrow y = 2; 4z = 4 \Rightarrow z = 1$

সুতরাং নির্ণেয় $A = [x \quad y \quad z] = [-1 \quad 2 \quad 1]$

Scanned with CamScanner