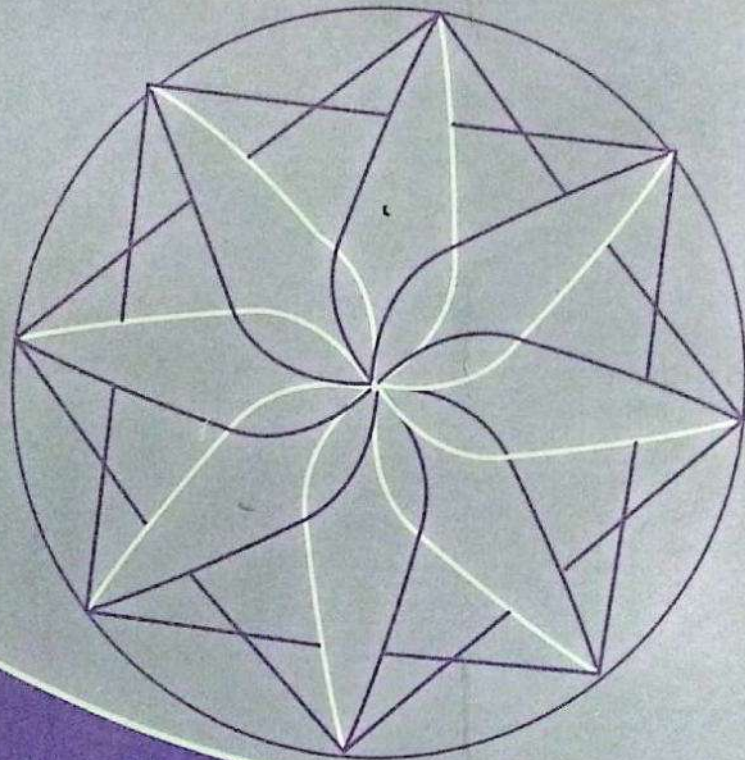


উচ্চতৰ গণিত

দ্বিতীয় পত্ৰ

সমাধান

একাদশ ও দ্বাদশ শ্ৰেণি



মোঃ কেতাৰ উদ্দীন

প্রকাশনায় : এস.কে. এল. পাবলিকেশন

২৭, সিরিশ দাস লেন, বাংলাবাজার, ঢাকা।

ফোনঃ ০১৮১৬৭৪০৮০৫

[এই পুস্তকের গ্রন্থস্বত্ব লেখক কর্তৃক সংরক্ষিত।]

প্রথম প্রকাশ : ২০১৪

প্রথম সংস্করণ : ২০১৫

দ্বিতীয় সংস্করণ : ২০১৬

তৃতীয় সংস্করণ : ২০১৭

চতুর্থ সংস্করণ : ২০১৮

পঞ্চম সংস্করণ : ২০১৯

ষষ্ঠ সংস্করণ : ২০২০

সপ্তম সংস্করণ : ২০২১

অষ্টম সংস্করণ : ২০২২

নবম সংস্করণ : ২০২৩-২০২৪

দশম সংস্করণ : ২০২৪-২০২৫

মূল্য : ৫৫০.০০ টাকা মাত্র।

কম্পিউটার কম্পোজ :

লেখক, মোঃ কেতাব উদ্দীন।

কভার ডিজাইন :

লেখক, মোঃ কেতাব উদ্দীন।

মুদ্রণে : সাজু প্রিন্টিং প্রেস, ২৭, সিরিশ দাস লেন, বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রাপ্তিস্থান : এস.কে. এল. পাবলিকেশন

৩৮ বাংলাবাজার (নিচ তলা), ঢাকা।

মোবাইল : ০১৭১৮৮১৪০৪৮, ০১৬২০২১৩০২৫

এস. কে. এল. পাবলিকেশন, ঢাকা।

1. (a) দেখাও যে, $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

[রা.'০৫; কু.'০৭; ব.'১৪]

প্রমাণঃ $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $2^2 = 4$

$$\therefore 1 < \sqrt{2} < 2$$

$\therefore \sqrt{2}$ পূর্ণ (স্বভাবিক) সংখ্যা নয়।

[$\therefore 2$ এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বভাবিক সংখ্যা নেই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ ; যেখানে } p, q \in \mathbb{N} \text{ এবং } p, q \text{ সহমৌলিক।}$$

[$\sqrt{2}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q \in \mathbb{N}$ লিখা যায়]

$$\text{বা, } 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

$$\text{বা, } 2q = \frac{p}{q} \cdot p$$

[উভয় পক্ষকে q ($q \neq 0$) দ্বারা গুণ করে।]

স্পষ্টত 2 এবং q স্বভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে

তাদের গুণফল $2q$ পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ

এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি

ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ণ সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

$$\therefore 2q \neq \frac{p}{q} \cdot p$$

$\therefore \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore \sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

(b) দেখাও যে, $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা।

[য.'০৬; সি.'০৬; ব.'০৭; ঢা.'১৪]

প্রমাণঃ $2^2 = 4$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, $3^2 = 9$

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$$

$\therefore \sqrt{5}$ পূর্ণ (স্বভাবিক) সংখ্যা নয়।

[$\therefore 2$ এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বভাবিক সংখ্যা নেই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q} \text{ ; যেখানে } p, q \in \mathbb{N} \text{ এবং } p, q \text{ সহমৌলিক।}$$

[$\sqrt{5}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q \in \mathbb{N}$ লিখা যায়]

$$\text{বা, } 5 = \frac{p^2}{q^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

$$\text{বা, } 5q = \frac{p}{q} \cdot p$$

[উভয় পক্ষকে q ($q \neq 0$) দ্বারা গুণ করে।]

স্পষ্টত 5 এবং q স্বভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে

তাদের গুণফল $5q$ পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ

এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি

ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ণ সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

$$\therefore 5q \neq \frac{p}{q} \cdot p$$

$\therefore \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore \sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

(c) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{p}$ একটি অমূলদ সংখ্যা, যেখানে p একটি মৌলিক সংখ্যা।

প্রমাণঃ আমরা জানি, দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ ক্রমিক সংখ্যার বর্গের মধ্যে অন্তত একটি মৌলিক সংখ্যা বিদ্যমান।

$n, n+1 \in \mathbb{N}$ এর জন্য।

$$(n+1)^2 < p < n^2 \Rightarrow n+1 < \sqrt{p} < n$$

$\therefore \sqrt{p}$ পূর্ণ (স্বভাবিক) সংখ্যা নয়।

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{p}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}; \text{ যেখানে } a, b \in \mathbb{N} \text{ এবং } a, b \text{ সহমৌলিক।}$$

$$\text{বা, } p = \frac{a^2}{b^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

$$\text{বা, } pb = \frac{a}{b} \cdot a$$

[উভয় পক্ষকে b ($b \neq 0$) দ্বারা গুণ করে।]

স্পষ্টত p এবং b স্বভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে

তাদের গুণফল pb পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশ

এবং a পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{a}{b} \cdot a$ একটি

ভগ্নাংশ; অর্থাৎ পূর্ণ সংখ্যা নয়; কেননা a, b সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

$$\therefore pb \neq \frac{a}{b} \cdot a$$

$\therefore \sqrt{p}$ এর মান $\frac{a}{b}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore \sqrt{p}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

2. মান নির্ণয় কর:

$$(a) |-16+3| + |-1-4| - 3 - |-1-7| \quad [\text{চ. '০০}]$$

$$\begin{aligned} &= |-13| + |-5| - 3 - |-8| \\ &= -(-13) + (-(-5)) - 3 - (-(-8)) \\ &= 13 + 5 - 3 - 8 = 18 - 11 = 7 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$(b) |-1-8| + |3-1| \quad [\text{য. '০১; ব. '০৫}]$$

$$= |-9| + |2| = -(-9) + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$(c) ||2-6|-|-1-9|| \quad [\text{কু. '০২; ব. '০৫}]$$

$$= ||-4|-|-8|| = |-(-4) - (-(-8))|$$

$$= |4-8| = |-4| = -(-4) = 4 \text{ (Ans.)}$$

$$(d) |-3-5| \quad [\text{ঢা. বো. '০০}]$$

$$= |-8| = -(-8) = 8$$

$$(e) ||-2|-|-6|| = |-(-2) - (-(-6))|$$

$$= |2-6| = |-4| = -(-4) = 4 \text{ (Ans.)}$$

$$(f) 13 + |-1-4| - 3 - |-8| \quad [\text{য. '০৪; ব. '০৪; কু. '১০}]$$

$$= 13 + |-5| - 3 - \{-(-8)\}$$

$$= 13 + \{-(-5)\} - 3 - 8$$

$$= 13 + 5 - 11 = 18 - 11 = 7 \text{ (Ans.)}$$

3. নিম্নের অসমতাগুলির পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর:

$$(a) |x-2| < 5 \quad [\text{ব. '০২; ঢা. '০৩, '০৯; দি. '১১}]$$

$$\Rightarrow -5 < x-2 < 5$$

$$[\because |x| < \alpha \text{ iff } -\alpha < x < \alpha]$$

সকল পক্ষে 2 যোগ করে পাই,

$$\Rightarrow -5+2 < x-2+2 < 5+2$$

$$\Rightarrow -3 < x < 7 \text{ (Ans.)}$$

$$(b) |2x+3| < 7 \quad [\text{ব. '০২; ঢা. '০৩; চ. '১২; কুচবরা '১৮}]$$

$$\Rightarrow -7 < 2x+3 < 7$$

$$\Rightarrow -7-3 < 2x+3-3 < 7-3$$

$$\Rightarrow -10 < 2x < 4$$

$$\therefore -5 < x < 2 \text{ (Ans.)}$$

$$(c) |x-3| < 7 \quad [\text{কু. '০৫}]$$

$$\Rightarrow -7 < x-3 < 7$$

$$\Rightarrow -7+3 < x-3+3 < 7+3$$

$$\Rightarrow -4 < x < 10 \text{ (Ans.)}$$

$$(d) |x| < 3 \quad [\text{ঢা. '০৩}]$$

$$\Rightarrow -3 < x < 3 \quad [\because |x| < \alpha \text{ iff } -\alpha < x < \alpha]$$

$$(e) \frac{1}{|3x+1|} \geq 5, \text{ এখানে } x \neq -\frac{1}{3}$$

$$[\text{চ. '০১; সি. '০৬; য. '০৮; বুয়েট '১০-১১}]$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x+1| \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 3x+1 \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5} - 1 \leq 3x+1-1 \leq \frac{1}{5} - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } -\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15} \text{ কিন্তু } x \neq -\frac{1}{3}$$

$$3. (f) 2 \leq \frac{1}{|x-1|} \quad [\text{ব্লুয়েট '০৫; রা. '১৫}]$$

যদি $x-1=0$ i.e. $x=1$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$$\therefore x \neq 1$$

$$\text{এখন, } 2 \leq \frac{1}{|x-1|} \Rightarrow |x-1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 \leq x-1+1 \leq \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ অথবা } 1 < x \leq \frac{3}{2}$$

$$(g) \frac{1}{|x-1|} < 2$$

$$\Rightarrow 1 < 2|x-1|, [\because |x-1| > 0]$$

$$\Rightarrow |x-1| > \frac{1}{2}$$

$$\therefore x-1 > \frac{1}{2}, \text{ যখন } x-1 > 0$$

$$\Rightarrow x > 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\text{আবার, } -(x-1) > \frac{1}{2}, \text{ যখন } x-1 < 0$$

$$\Rightarrow x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } x < \frac{1}{2} \text{ অথবা } x > \frac{3}{2}$$

$$3. (h) 3 \leq |x-2| \leq 7$$

সমাধানঃ $(x-2)$ অঋণাত্মক হলে, $|x-2|=x-2$

$$\therefore 3 \leq |x-2| \leq 7 \Rightarrow 3 \leq x-2 \leq 7$$

$$\Rightarrow 5 \leq x \leq 9$$

আবার, $(x-2)$ ঋণাত্মক হলে,

$$|x-2| = -(x-2)$$

$$\therefore 3 \leq |x-2| \leq 7 \Rightarrow 3 \leq -(x-2) \leq 7$$

$$\Rightarrow -7 \leq x-2 \leq -3$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq -1$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } -5 \leq x \leq -1 \text{ অথবা } 5 \leq x \leq 9$$

$$3. (i) |5-2x| \geq 4$$

সমাধানঃ $(5-2x) \geq 0$ হলে,

$$|5-2x| = 5-2x$$

$$\therefore |5-2x| \geq 4 \Rightarrow 5-2x \geq 4 \Rightarrow -2x \geq -1$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

আবার, $(5-2x) < 0$ হলে,

$$|5-2x| = -(5-2x)$$

$$\therefore |5-2x| \geq 4 \Rightarrow -(5-2x) \geq 4$$

$$\Rightarrow -5+2x \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } x \leq \frac{1}{2} \text{ অথবা } x \geq \frac{9}{2}$$

4. নিম্নের অসমতাগুলি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

$$(a) |3x+2| < 7 \quad [\text{জা., রা. '০৪; সি. ০৭; চ.ব. '১০; রা. '১২}]$$

$$\Rightarrow -7 < 3x+2 < 7$$

$$\Rightarrow -7-2 < 3x+2-2 < 7-2$$